

纤维悬浮槽流场稳定性研究*

林建忠 游振江

浙江大学力学系, 流体传动及控制国家重点实验室, 杭州 310027

摘要 在纤维取向张量基础上, 建立了纤维悬浮流本构方程, 并推导了纤维悬浮流的修正 Orr-Sommerfeld 稳定性方程. 采用谱方法和有限差分法对方程进行了数值求解. 对无纤维存在的流场进行计算后, 所得结果与实验结果符合较好, 且比以往的计算结果有更高的精度. 对纤维悬浮流场计算结果表明, 纤维的存在减弱了流场的不稳定性, 使流场临界 Re 数提高, 扰动增长率降低, 不稳定扰动波的存在区域缩小. 减弱的程度与纤维的体积分数和长径比成正比.

关键词 纤维悬浮流 槽流 稳定性

纤维悬浮流已被广泛应用于化工、纺织、造纸、材料、食品加工等行业. 现有研究表明, 在一些产品的加工过程中, 添加少量纤维能显著改变流体的特性并减小流动阻力^[1,2], 从而影响加工过程和产品质量. 为了更好地发挥纤维的作用, 提高相关工业过程的生产效率和产品质量, 有必要对含悬浮纤维流场的流动特性进行深入研究, 其中之一就是纤维悬浮流场稳定性的研究.

关于纤维悬浮流的稳定性研究已有一些报道, Vaseleski 等^[2]发现纤维长径比和浓度的增加使流场更加稳定. Azaiez^[3]对纤维悬浮混合层流场进行了线性稳定性研究, 分析了纤维的存在对流动的影响, 说明纤维间的相互作用是流动稳定性增强的重要原因. Azaiez^[4]给出了高 Re 数下自由剪切流的线性稳定性分析结果, 总结了刚性纤维对场时间不稳定性的影响. 林建忠等^[5]得到了失稳后的混合层纤维取向和流场应力的特征.

然而, 以上研究的都是无壁面约束的自由剪切流场, 有壁面约束的槽流场的稳定性, 虽有一些文献报道^[6,7], 但都是无纤维存在的情形, 纤维悬浮槽流场的稳定性问题的研究尚未见报道. 槽流是壁面剪切流动中一种典型的流动模型, 因此, 本文对此进行研究.

1 数学模型

1.1 问题描述

本问题的基本流场如图 1 所示, 两平行平板间距为 d , 流体流向速度呈抛物线分布, 槽道中心线处有速度最大值 U .

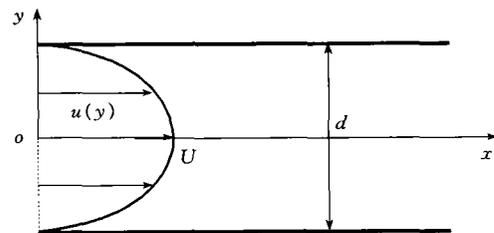


图 1 平面槽流场示意图

流动控制方程是连续性方程和动量方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

式中 \mathbf{u} 为速度矢量(在壁面 $\mathbf{u} = 0$), ρ , p 分别为流体密度和压力. $\boldsymbol{\tau}$ 是流场应力张量, 可表示成两项之和

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2, \quad (3)$$

其中第 1 项 $\boldsymbol{\tau}_1 = \eta \dot{\gamma}$ 为纯黏性流体的应力, η 是黏

2002-05-10 收稿, 2002-06-28 收修改稿

* 国家杰出青年科学基金资助项目(批准号: 19925210)

E-mail: mecjzlin@public.zju.edu.cn

性系数, $\dot{\gamma} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$ 是流体应变率张量; 第2项 τ_2 是由于纤维存在引起的流场附加应力. 设 ϕ , r 分别为纤维的体积分数和长径比, 对于半稀纤维悬浮流 ($1/r^2 \leq \phi \leq 1/r$), 附加应力表示为

$$\tau_2 = \eta \phi A (\dot{\gamma} : \mathbf{a}_4), \quad (4)$$

此处引入的系数 A 有多种表达式^[8~10], Azaiez^[4]发现当流场 Re 数与纤维长径比较大时, 不同的表达式将给出相同的结果. 本文采用 Batchelor 公式^[8]

$$A = \frac{r^2}{3 \ln(\sqrt{2\pi}/\phi)}, \quad (5)$$

此外, 定义二阶张量 \mathbf{a}_2 和四阶张量 \mathbf{a}_4 描述流场中纤维的取向分布. Hinch^[11]推导了 \mathbf{a}_2 变化率的方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a}_2 - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2 \cdot \nabla \mathbf{u} = \\ \frac{\chi - 1}{2} (\dot{\gamma} \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \cdot \dot{\gamma}) - \chi (\dot{\gamma} : \mathbf{a}_4) + \\ 2\mathbf{D}_r (\mathbf{I} - m\mathbf{a}_2), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\chi = (r^2 - 1)/(r^2 + 1)$, \mathbf{I} 为单位张量, m 表示空间维数. 张量 \mathbf{D}_r 反映纤维在流场中的扩散率, 假设为各向同性, 因此可表示成 $C_1 |\dot{\gamma}|$, 本文 C_1 取 0.01^[12].

为得到 \mathbf{a}_4 的表达式并代入(4)式, 需要建立第2个 \mathbf{a}_2 与 \mathbf{a}_4 的关系式. 本文采用 Verleye^[13]等提出的封闭模型, 并将张量写成分量形式

$$\begin{aligned} a_{ijkl} = \frac{\det(a_{ij})}{6} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \\ \frac{1}{3} (a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk}), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 \det 表示行列式, δ_{ij} 是 Kronecker 符号.

由(6), (7)式消去 \mathbf{a}_2 , 将 \mathbf{a}_4 代入(4)式即得到纤维附加应力 τ_2 的表达式. 至此, 建立了描述纤维悬浮流运动的数学方程组.

1.2 方程化简

首先对控制方程无量纲化. 定义无扰动的槽道中心线上 x 向速度 v 为特征速度, 半槽宽 $d/2$ 为特征长度, $Re = \rho U(d/2)/\eta$. 再引进反映纤维特性的参数 $H = A\phi/Re$, 表示纤维轴向拉力与流体惯性力之比. 令 $\mathbf{F} = \dot{\gamma} : \mathbf{a}_4$, 则得到无量纲形式的控制方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re} \dot{\gamma} + H\mathbf{F} \right), \quad (9)$$

及边界条件

$$\mathbf{u} |_{y=\pm 1} = 0. \quad (10)$$

采用线性稳定性理论并引入流函数 Ψ 作为基本变量, 替代速度和压力. 流场参数写成平均值与二维小扰动波叠加的形式如下:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = \Psi_0(y) + \psi'(x, y, t) = \\ \Psi_0(y) + \varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tau(x, y, t) = \mathbf{T}_0(y) + \tau'(x, y, t) = \\ \mathbf{T}_0(y) + \zeta(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = U_0(y) + u'(x, y, t) = \\ U_0(y) + \frac{d\varphi}{dy} e^{i\alpha(x-ct)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} v(x, y, t) = V_0(y) + v'(x, y, t) = \\ V_0(y) - i\alpha\varphi e^{i\alpha(x-ct)}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中流向平均速度 $U_0(y) = 1 - y^2$, 垂直平板方向速度 $V_0(y) = 0$. 考虑时间模式的稳定性, 令波数 α 为实数, $c = c_r + ic_i$ 为复数.

将(13), (14)式代入方程(9), 消去压力变量后得到纤维悬浮槽流场线性稳定性方程, 即修正的 Orr-Sommerfeld 方程

$$\begin{aligned} i\alpha [(U_0 - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2 U_0] \varphi - \frac{1}{Re} (D^2 - \alpha^2)^2 \varphi = \\ H [(D^2 + \alpha^2) F_{12} + i\alpha D(F_{11} - F_{22})], \end{aligned} \quad (15)$$

与边界条件

$$\varphi(\pm 1) = 0, D\varphi(\pm 1) = 0, \quad (16)$$

其中 $D = \frac{d}{dy}$.

(15)式 $H=0$ 对应不含纤维的情况, 此时(15)式退化为标准的 Orr-Sommerfeld 方程.

张量 \mathbf{F} 的各分量用 $\varphi(y)$ 的函数表示, 方程(15)整理为

$$\sum_{i=0}^4 J_i D^i \varphi(y) = 0, \quad (17)$$

式中 $J_i (i=0, 4)$ 是 $\varphi(y)$ 各阶导数的系数, 与坐标变量 y 有关.

2 数值方法

用两种数值方法求解方程(17), 第1种是谱方法, 该方法的基本思想是选取正交函数系, 把微分方程的解表示为一组正交函数的线性组合, 将原方程转化为待定系数的代数方程组. 对于槽流场, 选用 Chebyshev 多项式最合理. 记第一类 Chebyshev 多项式为 $T_n(y) = \cos(n \arccos y)$, 将方程(17)的函数 $\varphi(y)$ 在定义域 $-1 \leq y \leq 1$ 上展开成 $\varphi(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y)$. 利用 Chebyshev 级数递推公式处理各阶导数, 把关于 $\varphi(y)$ 的微分方程化为关于系数 a_n 的代数方程组. 边界条件采用 Lanczos 的 τ 方法处理, 即可计算方程组系数矩阵特征值.

第2种计算方法是有限差分法. 把计算区域划分为均匀网格, 用网格点处的中心差分代替方程

(17)中 $\varphi(y)$ 的各阶导数, 将方程(17)化为以离散点上函数值 φ_n 为未知数的齐次线性代数方程组, 令系数行列式为零得到特征方程 $F(\alpha, Re, H, c) = 0$.

3 计算结果及分析

3.1 无纤维的槽流场稳定性

首先对不含纤维的槽流稳定性进行分析, 一方面可以与现有结果作比较, 验证本文所采用数值方法的正确性; 另一方面了解单一流动的稳定性特征, 作为纤维悬浮流分析的参照.

令方程(17)中 $H=0$, 此时方程仅含 $\varphi(y)$ 及其二阶与四阶导数项. 定义流场中出现不稳定特征模态的最小 Re 数为临界 Re 数—— Re_c , 本文求得 $Re_c = 5772.22$, 与之对应的临界波数 $\alpha_c = 1.020558$, 这一结果与 Orszag^[14] 结果相符. 当 $\alpha = 1$, $Re = 10000$ 时解出的 17 个最不稳定的对称模态特征值列于表 1 中, 与文献[14, 15] 对比, 说明本文结果不仅可靠而且精度更高.

表 1 对称模态最不稳定的特征值系列 ($\alpha = 1, Re = 10000$)

本文结果	文献[14]的结果	文献[15]的结果
0.23752649 + 0.00373967i	0.23752649 + 0.00373967i	0.23752649 + 0.00373967i
0.96464251 - 0.03518658i	0.96464251 - 0.03518658i	0.96464251 - 0.03518658i
0.93635178 - 0.06325157i	0.93635178 - 0.06325157i	0.93635178 - 0.06325157i
0.90805633 - 0.09131286i	0.90805633 - 0.09131286i	0.90805633 - 0.09131286i
0.87975570 - 0.11937073i	0.87975570 - 0.11937073i	0.87975568 - 0.11937073i
0.34910681 - 0.12450196i	0.34910682 - 0.12450198i	0.34910681 - 0.12450197i
0.85144938 - 0.14742560i	0.8514494 - 0.1474256i	0.85144939 - 0.14742558i
0.82313696 - 0.17547807i	0.8231370 - 0.1754781i	0.82313690 - 0.17547808i
0.19005924 - 0.18282191i	0.1900592 - 0.1828219i	
0.79481840 - 0.20352916i	0.794818 - 0.203529i	
0.47490133 - 0.20873123i	0.474901 - 0.208731i	
0.76649403 - 0.23158505i	0.76649 - 0.23159i	
0.36849864 - 0.23882486i	0.36850 - 0.23882i	
0.73811508 - 0.25969180i	0.73812 - 0.25969i	
0.58721189 - 0.26716161i	0.58721 - 0.26716i	
0.51291468 - 0.28662622i	0.51292 - 0.28663i	
0.70887500 - 0.28765646i	0.70887 - 0.28765i	

Mack^[7] 给出 $\alpha = 1, Re = 10000$ 时对称模态特征值的分布图, 与本文所得结果同时列于图 2 中, 可见其一致性.

关于槽流稳定性的中性曲线, 已有一些数值结果, 鉴于 Pekeris 等^[16] 计算的 Re 数范围较大, 因此本文予以选用作为比较. 这一问题典型的实验结果由 Nishioka^[17] 等得到, 由图 3 可见, 实验可以观察到不同参数 (α, Re) 条件下流场中线性扰动的 3 种发展趋势与计算结果的预测基本一致.

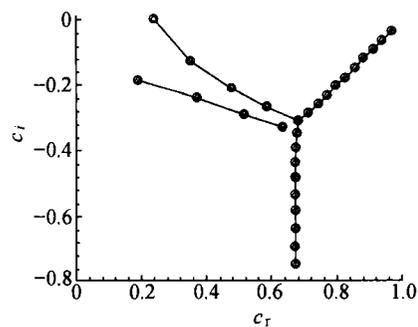


图 2 对称模态特征值分布 ($\alpha = 1, Re = 10000$)

\triangle 本文结果, \circ Mack 的结果

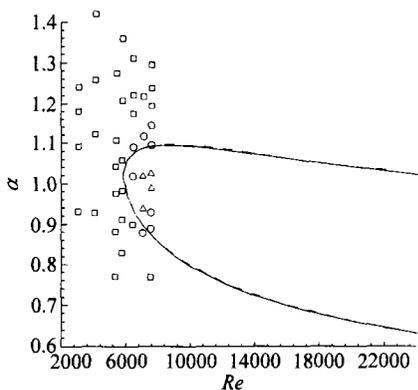


图3 槽流稳定性中性曲线

— 本文结果 - - - - - Pekeris 等的结果
实验结果(Nishioka 等): □ 扰动衰减; ○ 扰动中性; △ 扰动放大

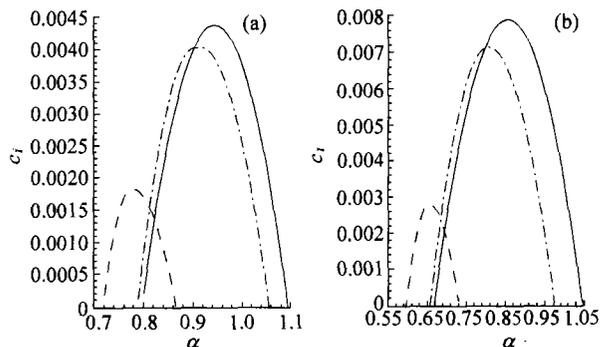


图5 不同 H 值下扰动增长率与扰动波数的关系

— $H=0$; ···· $H=0.0001$; - - - - $H=0.001$.
(a) $Re=10000$; (b) $Re=20000$

3.2 含悬浮纤维的槽流稳定性

添加纤维后流动稳定性特征有明显变化. 图4显示纤维特性参数 H 改变时, 中性稳定曲线的变化情况, $H = A\phi/Re$. 从中发现3条规律: (1) 加入纤维后, 流场临界 Re 数 Re_c 提高, 说明流场更不容易失稳. 随着 H 的增加, Re_c 增大而 α_c 相应减小. (2) H 增大使得中性曲线开口端截距减小, 说明在 Re 数一定时出现线性扰动失稳的范围缩小. (3) 当 H 增加时整条曲线向低波数方向移动, 即较大的 H 值条件下长波扰动相对更容易失稳.

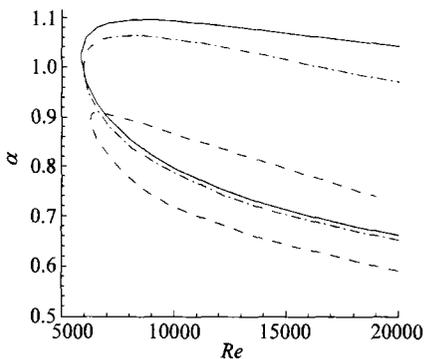


图4 纤维悬浮槽流的稳定性中性曲线

— $H=0$; ···· $H=0.0001$; - - - - $H=0.001$

图5给出2种 Re 数下改变参数 H 对扰动增长率与波数之间关系的影响. 若给定流场 Re 数, 增加 H (即提高纤维的体积分数 ϕ 或长径比 r) 使不稳定扰动的最大增长率明显减小. 这表明纤维间的相互作用对于抑制槽流的不稳定性起到重要作用. 从另一个角度看, 对比图5(a)与(b), 若 H 不变而 Re 数增大, 扰动的发展加快从而减弱了流动的稳定性.

由图6可得 Re_c 与对应的 α_c 随参数 H 的变化规律. 结合图4反映出纤维在流动稳定化方面所起的作用.

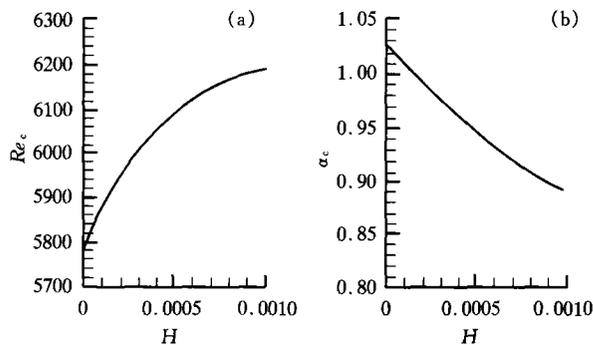


图6 临界 Re 数、临界波数与 H 的关系

(a) $Re_c \sim H$; (b) $\alpha_c \sim H$

4 结论

本文运用线性稳定性理论对槽流纤维悬浮流以及对应的无纤维流动进行了稳定性分析. 对于无纤维流动, 得到槽流的中性稳定性曲线与特定参数条件下对称模态的不稳定特征值系列, 与现有结果对比, 说明了本文结果的准确性.

对纤维悬浮流的稳定性分析表明, 与不含纤维的情况对比, 流场临界 Re 数升高、不稳定扰动波的存在范围明显减小并移向低波数区, 并且线性扰动的增长率降低, 即纤维的存在抑制了流场的失稳. 纤维的体积分数和长径比越大, 抑制的效果越强.

参 考 文 献

- 1 Arrannaga A B. Friction reduction characteristics of fibrous and colloidal substances. *Nature*, 1970, 225: 447
- 2 Vaseleski R C, et al. Drag reduction in the turbulent flow of fibre suspensions. *AICHE J*, 1974, 20: 301
- 3 Azaiez J. Linear stability of free shear flows of fibre suspensions. *J Fluid Mech*, 2000, 404: 179
- 4 Azaiez J. Reduction of free shear flows instability: Effects of polymer versus fibre additives. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2000, 91: 233
- 5 林建忠, 等. 纤维悬浮混合层中纤维取向与流场应力的研究. *自然科学进展*, 2002, 12 (4): 372
- 6 Itoh N. A power series method for the numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation. *Trans Japan Soc Aero Space Sci*, 1974, 17: 65
- 7 Mack L M. A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer. *J Fluid Mech*, 1976, 73: 497
- 8 Batchelor G K. The stress generated in a non-dilute suspension of elongational particles by pure straining. *J Fluid Mech*, 1971, 46: 813
- 9 Dinh S M, et al. A rheological equation state for semi-concentrated fibre suspensions. *J Rheol*, 1984, 28: 207
- 10 Shaqfeh E S G, et al. The hydrodynamic stress in a suspension of rods. *Phys Fluids*, 1990, 2: 7
- 11 Hinch E J. Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows. *Phys Fluids*, 1977, 20: 22
- 12 Folgar F P, et al. Orientation behaviour of fibres in concentrated suspensions. *J Reinf Plast Comp*, 1984, 3: 98
- 13 Verleye V, et al. In developments in non-Newtonian flows. *Proc 1993 ASME Winter Annual Meeting*, New Orleans, LA, USA, ASME, 1993. 175: 139
- 14 Orszag S A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J Fluid Mech*, 1971, 50: 689
- 15 Sun D J, et al. The complex generalized matrix eigenvalue problem in numerical solver for Orr-Sommerfeld equation. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 27: 631
- 16 Pekeris C L, et al. Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude in the vicinity of the neutral curve. *J Fluid Mech*, 1967, 29: 31
- 17 Nishioka M, et al. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow. *J Fluid Mech*, 1975, 72: 731

国家自然科学基金研究成果专著

《铸造工程的模拟仿真与质量控制》柳百成, 等 编著
机械工业出版社 定价: 28.00 元



本书以中国工程院院士、清华大学柳百成教授领导的科研组长期从事铸造领域的计算机应用, 特别是铸造过程宏观及微观模拟仿真的研究成果为基础, 全面系统地介绍了铸造工程的计算机模拟仿真及质量控制技术, 综合反映了国际、国内学者在铸造工程模拟仿真和质量控制研究领域的研究进展和发展水平, 提出了用电子计算机技术改造传统铸造产业的基本思路和技术措施。

全书共分9章, 主要以铸造充型凝固过程的流场、温度场模拟仿真和缩孔、缩松预测, 应力场数值模拟分析及微观组织和力学性能预测为主要内容。介绍了凝固模拟技术与CAD/CAM的集成技术以及如何纳入并行工程环境的技术模型。通过实例, 详细介绍了专家系统在铸造工程中铸造缺陷分析与诊断的应用以及计算机质量控制技术在液体金属和造型、造芯质量控制方面的应用。最后, 还介绍了铸造企业中

计算机信息管理系统的建立及其模型。